SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X

Available at www.uznauka.uz

MATRITSA DETERMINANTLARI VA ULARNING ALGEBRAIK STRUKTURALARDAGI QO‘LLANILISHLARI

Jumayeva O‘g‘iloy Normurodovna

01.01.06 – Algebra ixtisosligi bo‘yicha doktorant

Navoiy, O‘zbekiston

Annotatsiya*:Ushbu maqolada matritsa determinantlari nazariyasining asosiy mazmuni, determinantning algebraik tabiati hamda uning turli algebraik strukturalardagi qo‘llanilishlari tahlil qilinadi. Determinantning ko‘p chiziqlilik, alternirlovchanlik, normallashganlik va multiplikativlik kabi fundamental xossalari izchil bayon qilinib, ularning chiziqli tenglamalar sistemasi, teskari matritsa, xarakteristik ko‘phad, kommutativ halqalar va modullar nazariyasidagi o‘rni yoritiladi. Shuningdek, determinantning Smith normal shakli, determinantal ideallar va Fitting invariantlari bilan bog‘liqligi ko‘rsatilib, determinantning zamonaviy algebraik tadqiqotlardagi nazariy ahamiyati asoslanadi.*

Kalit so‘zlar*: determinant, matritsa, algebraik struktura, kommutativ halqa, maydon, modul, minor, Smith normal shakli, determinantal ideal, Fitting invarianti.*

Abstract

This article studies the theory of matrix determinants, their algebraic nature, and their applications in various algebraic structures. Fundamental properties of determinants such as multilinearity, alternation, normalization, and multiplicativity are discussed, and their role in systems of linear equations, inverse matrices, characteristic polynomials, commutative rings, and module theory is analyzed.

SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И
ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

Special attention is paid to the connections of determinants with Smith normal form, determinantal ideals, and Fitting invariants, which demonstrates the importance of determinants as structural invariants in modern algebra.

Keywords: determinant, matrix, algebraic structure, commutative ring, field, module, minor, Smith normal form, determinantal ideal, Fitting invariant.

Kirish

Matritsa determinantlari chiziqli algebra va zamonaviy algebraning eng muhim tushunchalaridan biri bo‘lib, ular matritsaning teskarilanuvchanligi, chiziqli operatorlarning spektral xossalari, chiziqli tenglamalar sistemalarining yechiluvchanligi hamda turli algebraik obyektlarning strukturaviy tavsifini berishda markaziy rol o‘ynaydi. Determinant dastlab chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish jarayonida yuzaga kelgan bo‘lsa-da, keyinchalik u mustaqil algebraik invariant sifatida shakllanib, ko‘p chiziqli algebra, kommutativ algebra, algebraik geometriya va modullar nazariyasiga chuqur kirib bordi.

Determinantning ilmiy ahamiyati shundaki, u kvadrat matritsaning singulyar yoki nonsingulyar ekanligini aniqlash, xarakteristik ko‘phadni tuzish, o‘z qiymatlarni tavsiflash, modul gomomorfizmlarini tahlil qilish va halqalar ustida qaraladigan matritsalar xossalarini o‘rganish uchun qulay va kuchli vosita hisoblanadi. Ayniqsa, kommutativ halqalarda determinantning birlik element bilan bog‘lanishi, principal ideal domain ustida Smith normal shaklini olish va determinantal ideallarni qurishda determinantlarning tutgan o‘rni mazkur mavzuning dolzarbligini yanada kuchaytiradi.

Mazkur maqolaning maqsadi determinantlarning asosiy nazariy xossalarini tizimli tahlil qilish, ularning algebraik strukturalardagi qo‘llanilishlarini umumlashtirish va determinantning zamonaviy algebraik tadqiqotlardagi nazariy ahamiyatini koʻrsatishdan iborat.

1. Determinant tushunchasi va uning asosiy xossalari

Agar A=(a_{ij}) ∈ M_n(F) boʻlsa, bu yerda F kommutativ maydon yoki halqa, u holda A matritsaning determinanti permutatsiyalar orqali aniqlanadi. Determinantning klassik ta’rifi quyidagi formula bilan beriladi:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

(1)

Bu yerda S_n — n ta elementning barcha permutatsiyalari toʻplami, sgn(σ) esa permutatsiyaning ishorasini bildiradi. Mazkur ta’rif determinantning kombinatorik va algebraik mohiyatini bir vaqtning oʻzida ifodalaydi.

Determinantning birinchi asosiy xossasi uning koʻp chiziqliligidir. Ya’ni determinant matritsaning har bir qatori boʻyicha alohida chiziqli funksional boʻlib, qatorlardan birini chiziqli kombinatsiya bilan almashtirish determinantni ham shu kombinatsiya boʻyicha ajratadi. Agar i-qator r_i=αu+βv koʻrinishda boʻlsa, u holda determinant uchun quyidagi munosabat oʻrinli boʻladi:

$$\det(\ldots, \alpha u + \beta v, \ldots) = \alpha \det(\ldots, u, \ldots) + \beta \det(\ldots, v, \ldots)$$

(2)

SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

Ko‘p chiziqlilik determinantni ko‘p chiziqli algebra nuqtai nazaridan o‘rganish imkonini beradi.

Ikkinchi fundamental xossa — alternirlovchanlikdir. Agar matritsaning ikkita qatori o‘rin almashtirilsa, determinantning ishorasi o‘zgaradi. Natijada ikki qator teng bo‘lgan matritsaning determinanti nolga teng bo‘ladi.

$$\det A' = -\det A$$

(3)

Bu yerda A′ matritsa A ning ikki qatori o‘rin almashtirilgan ko‘rinishidir.

Uchinchi xossa normallashganlik bo‘lib, birlik matritsaning determinanti 1 ga teng:

$$\det E_n = 1$$

(4)

Mazkur shart determinantni yagona ko‘p chiziqli alternirlovchi funksional sifatida aniqlashda zarurdir.

Determinantning eng muhim algebraik xossalaridan biri uning multiplikativligidir. Ixtiyoriy ikkita kvadrat matritsa uchun quyidagi tenglik bajariladi:

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(5)

Bu formula determinantni matritsalar ko‘paytmasi bilan uzviy bog‘laydi.

Shuningdek, determinant transponirlashga nisbatan invariant bo‘lib, quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

(6)

Bu xossa determinantning satrlar va ustunlar bo‘yicha simmetrik mohiyatga ega ekanligini ko‘rsatadi.

2. Determinant va chiziqli tenglamalar sistemasi

Determinantning eng muhim amaliy qo‘llanilishlaridan biri chiziqli tenglamalar sistemasi bilan bog‘liq. Agar Ax=b ko‘rinishdagi sistema qaralsa va A kvadrat matritsa bo‘lsa, determinant matritsaning teskarilanuvchanligini hamda sistemaning yagona yechimga ega bo‘lishini aniqlaydi. Maydon ustida quyidagi ekvivalentlik o‘rinli:

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1} \text{ mavjud}$$

(7)

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

Demak, determinant nolga teng bo‘lmasa, matritsa nonsingulyar bo‘ladi va sistemaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi.

Bunday holda noma’lumlarni Kramer qoidasi yordamida topish mumkin. Agar A_i matritsa A ning i-ustuni o‘rniga erkin hadlar ustuni b qo‘yilgan matritsa bo‘lsa, u holda yechim quyidagicha ifodalanadi:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(8)

Kramer qoidasi determinantning chiziqli sistemalar nazariyasidagi klassik qo‘llanilishidir.

Determinantning nolga tengligi esa qatorlar yoki ustunlar orasida chiziqli bog‘liqlik mavjudligini ko‘rsatadi. Shu sababli determinant rang tushunchasi bilan ham uzviy bog‘langan.

3. Determinant va teskari matritsa, adjungirlangan matritsa

Determinant teskari matritsa formulasida ham markaziy o‘rin tutadi. Algebraik to‘ldiruvchilar asosida tuzilgan adjungirlangan matritsa yordamida teskarilanuvchi matritsaning inversi quyidagicha yoziladi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A), \qquad \det A \neq 0$$

(9)

SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

Bu formula determinantning nolga teng emasligi matritsaning teskari elementga ega bo‘lishi uchun zarur va yetarli shart ekanini tasdiqlaydi.

Adjungirlangan matritsa bilan determinant orasidagi bog‘lanish quyidagi fundamental tenglik orqali ifodalanadi:

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A = \det(A) E_n$$

(10)

Mazkur formula chiziqli algebra kursidagi klassik natijalardan biridir.

4. Determinant va xarakteristik ko‘phad

Determinant chiziqli operatorlar va matritsalarning spektral xossalarini o‘rganishda ham asosiy vositadir. A matritsaning xarakteristik ko‘phadi determinant orqali aniqlanadi:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$$

(11)

Xarakteristik ko‘phadning ildizlari A matritsaning o‘z qiymatlari bo‘lib, ular operatorning spektral xossalarini belgilaydi.

Determinant orqali aniqlangan xarakteristik ko‘phad Cayley–Hamilton teoremasi bilan uzviy bog‘liq. Unga ko‘ra, har qanday kvadrat matritsa o‘z xarakteristik ko‘phadining ildiziga aylanadi. Mazkur natija minimal ko‘phad, Jordan normal shakli va invariant ostfazolar nazariyasida muhim rol o‘ynaydi.

5. Determinantlarning kommutativ halqalar va modullar nazariyasidagi qo‘llanilishlari

Determinant tushunchasi faqat haqiqiy yoki kompleks sonli matritsalar bilan cheklanmaydi. Agar matritsa elementlari kommutativ halqa R ga tegishli bo‘lsa, determinant ham R ning elementi sifatida aniqlanadi. Bunda determinant matritsaning invertibiligini tekshirishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Principal ideal domain ustida determinant va minorlar modul gomomorfizmlarini tavsiflashda ayniqsa muhimdir. Bunday holatda matritsani Smith normal shakliga keltirish mumkin:

(12)

Bu yerda d_1,d_2,\ldots,d_r invariant faktorlar bo‘lib, ular modulning strukturasi haqida to‘liq ma’lumot beradi.

Determinantning kommutativ algebra va algebraik geometriyadagi qo‘llanilishlaridan yana biri determinantal ideallar bilan bog‘liq. A matritsaning barcha r-tartibli minorlari hosil qilgan ideal I_r(A) matritsaning rang shartlari, modul prezentatsiyalari va algebraik ko‘pxilliklarning singulyar xossalarini o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi.

Shuningdek, Fitting ideallari modulning prezentatsiya matritsasining minorlari yordamida aniqlanadi. Natijada determinant va minorlar modullar

SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

nazariyasida annihilatorlar, invariant faktorlar va strukturaviy tavsiflarni olishda markaziy vositaga aylanadi.

Xulosa

Maqolada matritsa determinantlari nazariyasining asosiy g‘oyalari hamda determinantlarning algebraik strukturalardagi qo‘llanilishlari tizimli ravishda tahlil qilindi. Determinantning ko‘p chiziqlilik, alternirlovchanlik, normallashganlik, multiplikativlik va transponirlashga nisbatan invariantlik kabi xossalari uning fundamental algebraik invariant ekanini ko‘rsatadi.

Shuningdek, determinantning chiziqli tenglamalar sistemasi, teskari matritsa, xarakteristik ko‘phad, kommutativ halqalar, principal ideal domain, Smith normal shakli, determinantal ideallar va Fitting invariantlari bilan bog‘liqligi yoritildi. Bu determinantlar nazariyasining nafaqat klassik chiziqli algebra, balki zamonaviy kommutativ algebra, modullar nazariyasi va algebraik geometriyada ham dolzarb ahamiyatga ega ekanini tasdiqlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Hungerford T.W. Algebra. – New York: Springer, 1974.
2. Lang S. Linear Algebra. – New York: Springer, 1987.
3. Artin M. Algebra. – New Jersey: Prentice Hall, 1991.
4. Axler S. Linear Algebra Done Right. – Cham: Springer, 2015.
5. Roman S. Advanced Linear Algebra. – New York: Springer, 2008.
6. Herstein I.N. Topics in Algebra. – New York: Wiley, 1975.
7. Dummit D.S., Foote R.M. Abstract Algebra. – Hoboken: Wiley, 2004.
8. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. – New York: Chelsea Publishing, 1959.

SCIENCE AND SOCIETY-
FAN VA JAMIYAT- НАУКА И ОБЩЕСТВО
ILMIY-TAHLILIY JURNAL

Issue - 6(2026) / ISSN 2992-913X Available at www.uznauka.uz

9. Jacobson N. Basic Algebra I. – New York: W.H. Freeman, 1985.
10. Bourbaki N. Algebra I. – Berlin: Springer, 1989.