

UMUMIY O'RTA TA'LIM MAKTABLARIDA BA'ZI BIR ALGEBRAIK TENGLAMALARNI O'RGANISH BO'YICHA MULOHAZALAR

A. Axlimirzayev

ADU amaliy matematika kafedrası professori

Sh. Ahmadaliyeva

D. Mo'minova

ADU amaliy matematika kafedrası magistrleri

Annotasiya: ushbu maqolada umumiy o'rta ta'lim maktablari va akademik litseylar matematika kursida uchraydigan algebraik tenglamalar tarkibiga kiruvchi $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$ ko'rinishdagi xamda turli darajali simmetrik, kososimmetrik va qaytma tenglamalar va ularni yechish usullari yetarlicha misollar yordamida yoritib berilgan.

Kalit so'zlar: algebraik tenglama, transsendent tenglama, simmetrik tenglama, qaytma tenglama, kvadrat tenglama, kososimmetrik tenglama.

Ma'lumki, bugungi kunda tenglamalar umumiy o'rta ta'lim maktablarining birinchi sinfidan boshlab o'qitilmoqda buning asosiy sabablaridan biri tenglama amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarning matematik modelidan iborat ekanligidir. Bu esa umumiy o'rta ta'lim maktablari va akademik litseylarda tenglamalarni o'rganishga alohida e'tibor qaratish kerakligini taqozo etadi. Umumiy o'rta ta'lim maktablarida o'rganiladigan tenglamalarning asosiy qismini algebraik tenglamalar egallaydi. Algebraik tenglama umumiy ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad (1)$$

Tenglama n-darajali ($n \in \mathbb{N}$) algebraik tenglama deb ataladi. Bu yerda $\alpha_0 \neq 0$, α_i ($i=1,2,3,\dots$) algebraik tenglamaning koeffitsientlari.

Algebraik tenglamada $n=1$, $n=2$ bo'lsa, chiziqli va kvadrat tenglama hosil bo'ladi va ularni yechishning umumiy usullari mavjud. $n=3$ va $n=4$ bo'lganda ba'zi xollarda yechish usullari mavjud. $n \geq 3$ bo'lganda tenglamani yechishning umumiy usullari mavjud emas. Bunday xollarda tenglamalarni yechishda uni chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratishga harakat qilinadi yoki taqribiy yechiladi. $n \geq 3$ bo'lganda algebraik tenglamalarning maxsus ko'rinishlari mavjud.

Algebraik tenglamalarni butun, kasr, ratsional va irratsional tenglamalarga ajratish mumkin. $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr (1) ko'rinishdagi tenglamaning ildizi bo'lishi kerak. (1) tenglamaning $x=\alpha$ ildizini bilgan xolda Bezu teoremasiga asosan berilgan tenglamaning darajasini bittaga kamaytirish mumkin.

Yuqorida biz (1) ko'rinishdagi algebraik tenglamalarni ($n \geq 3$) yechishning umumiy usullari mavjud emasligini ta'kidladik. Ularni yechishda asosan ko'paytuvchilarga ajratishga harakat qilinadi. Bunga quyidagi misolni keltirish mumkin.

1-misol. $x^3+2x^2+3x+6=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$(x^3+2x^2)+(3x+6)=0$, $x^2(x+2)+3(x+2)=0$, $(x+2)(x^2+3)=0$. Bundan $x+2=0$ va $x^2+3=0$ larni yozamiz. Bu tenglamalarni yechish usullari bizga ma'lum.

2-misol. $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani chap tomonini birdaniga guruxlab ko'paytuvchilarga ajratib bo'lmaydi. Shuning uchun ham bu yerda dastlab $3x^2$ ni $2x^2+x^2$ ko'rinishida yozib olamiz, so'ngra guruxlab ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$(x^4+x^3+x^2)+(2x^2+2x+2)=0$, $x^2(x^2+x+1)+2(x^2+x+1)=0$, $(x^2+x+1)(x^2+2)=0$.

Bundan

$x^2+x+1=0$ va $x^2+2=0$ tenglamalarni xosil qilamiz. Bu tenglamalar haqiqiy ildizlarga ega emas.

3-misol. $x^3+4x^2-24=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani yuqoridagi usullar bilan yechib bo'lmaydi. Bu tenglamani butun ildizlarini topishga harakat qilamiz. Agar u butun ildizlarga ega bo'lsa, ular ozod hadning bo'luvchilaridan. Ya'ni $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ lardan iborat bo'lishi mumkin. Tanlash usuli bilan $x=2$ bu tenglamaning ildizi ekanligini aniqlaymiz. U holda berilgan tenglamani chap tomoni $x-2$ ga bo'linadi. Bo'lishni bajarib, berilgan tenglamani $(x-2)(x^2+6x+12)=0$ ko'rinishida yozamiz. Bundan esa $x-2=0$ va $x^2+6x+12=0$ larni yozamiz. Bularni yechish usuli bizga ma'lum.

4-misol. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani yuqoridagi usullar bilan yechib bo'lmaydi. Uni yechish uchun $y = x^2+x+4$ almashtirish qilamiz. U xolda $y^2+8xy+15x^2=0$ tenglama xosil bo'ladi. Xosil bo'lgan tenglamani y ga nisbatan kvadrat tenglama deb yechamiz.

$$y_{1,2} = -4x \pm \sqrt{16x^2 - 15x^2} = -4x \pm x \qquad y_1 = -3x, y_2 = -5x$$

Demak, biz $x^2+x+4 = -3x$ va $x^2+x+4 = -5x$ tenglamalarga ega bo'ldik. Bularni yechish usullari bizga ma'lum.

5-misol. $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama ozod hadi -1 ga teng butun koeffitsientli tenglamadir. Bu tenglamani ham yuqoridagi usullarning hech biri bilan yechib bo'lmaydi. Bu tenglamani yechish uchun uning har bir hadini x ning eng yuqori darajasiga bo'lamiz.

$21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$, $21 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$, $\frac{1}{x} = y$ belgilash qilamiz. U holda

$21 + y - 5y^2 - y^3 = 0$, ya'ni $y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

Tanlash usuli bilan $y = -3$ berilgan tenglamaning ildizlaridan biri ekanligini topamiz. Haqiqatdan ham, $(-3)^3 + 5(-3)^2 - (-3) - 21 = -27 + 45 + 3 - 21 = 0$, $0 = 0$ endi oxirgi tenglamani har ikkala tomonini hadma-had $x+3$ ga bo'lib $(y+3)(y^2 + 2y - 7) = 0$ ga, bundan esa $y+3=0$ va $y^2 + 2y - 7 = 0$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Belgilashni e'tiborga olib x ning qiymatlarini topamiz.

Ba'zi algebraik tenglamalar $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$ ko'rinishida berilishi mumkin. Bu yerda a, b, c, d, A lar berilgan sonlar. Agar bu tenglamada $a+b=c+d=k$ bo'lsa, u holda berilgan tenglama $y=x^2-kx$ almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi.

6-misol. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu yerda $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$, $d = -4$ va $A = 24$ bo'lib,

$-1 + (-4) = -2 + (-3) = -5$. Shuning uchun biz $(x+1)(x+4)$ va $(x+2)(x+3)$ ko'paytmalarni topib $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$ tenglamaga ega bo'lamiz. Endi $y = x^2 + 5x$ deb olsak, $(y+4)(y+6) = 24$ yoki $y^2 + 10y = 0$ tenglamani xosil qilamiz.

Bundan $y_1 = 0$ va $y_2 = -10$ lar kelib chiqadi. Endi eski o'zgaruvchiga qaytib $x^2 + 5x = 0$ va $x^2 + 5x = -10$ tenglamalarni xosil qilamiz. Bu tenglamalarni yechish usullari bizga ma'lum.

Ba'zi algebraik tenglamalar $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$ ko'rinishda ham beriladi. Bu yerda a, b, c, d, A lar berilgan sonlar. Agar bu tenglamada $ad=bc$ bo'lsa,

u holda berilgan tenglama $y=x+\frac{m}{x}$ almashtirish yordamida kvadrat tenglamaga keltiriladi.

7-misol. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)=30x^2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu yerda $a=2, b=3, c=4, d=6$ va $A=30$. Bu yerda $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$. Endi

$(x-3)(x-4)$ va $(x-2)(x-6)$ ko'paytmalarni topib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$(x^2-7x+12)(x^2-8x+12)=30x^2$$

Bu tenglamani chap tomonidagi har bir qavsni x ga va o'ng tomonini x^2 ga bo'lamiz. Natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi.

$$(x+\frac{12}{x}-7)(x+\frac{12}{x}-8)=30$$

Endi $y = x + \frac{12}{x}$ almashtirish qilib, $(y-7)(y-8)=30$ yoki $y^2-15y+26=0$ tenglamani, bundan esa $y_1=2, y_2=13$ larni topamiz. Eski o'zgaruvchiga qaytsak, $x+\frac{12}{x}=2$ va $x+\frac{12}{x}=13$ tenglamalarga, bulardan esa $x^2-2x+12=0$ va $x^2-13x+12=0$ kvadrat tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarni yechish usullari bizga ma'lum.

Ba'zan $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, a \neq 0$ ko'rinishidagi tenglamalar ham uchraydi. Bu tenglamani kuzatib, unda bosh koeffitsient va ozod had hamda ulardan bir xil uzoqlikda turgan hadlarning koeffitsientlari o'zaro teng ekanligini ko'ramiz. Odatda bunday tenglamalarni to'rtinchi darajali simmetrik tenglamalar deyiladi. Bunday tenglamalar $y=x+\frac{1}{x}$ almashtirish yordamida kvadrat tenglamaga keltiriladi.

8-misol. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama to'rtinchi darajali simmetrik tenglamadir. Uni yechish uchun $x^2(x \neq 0)$ ga bo'lamiz va qo'shiluvchiarni quyidagicha guruhlaymiz.

$$x^2 + 5x + 2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$y = x + \frac{1}{x}$ belgilash qilamiz, u holda $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ bo'lib, oxirgi tenglama $y^2 - 2 + 5y + 2 = 0$ yoki $y^2 + 5y = 0$ ko'rinishga keladi. Bundan esa $y_1 = 0$, $y_2 = -5$ larni topamiz. Endi eski o'zgaruvchiga qaytsak $x + \frac{1}{x} = 0$ va $x + \frac{1}{x} = -5$ yoki $x^2 + 1 = 0$ va $x^2 + 5x + 1 = 0$ tenglamalarga kelimiz. Bu tenglamalarni yechish usuli bizga ma'lum.

$\alpha x^3 + bx^2 + bx + \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$ ko'rinishdagi tenglamaga uchinchi darajali simmetrik tenglama deyiladi. $x = -1$ soni bu tenglamaning ildizlaridan biri bo'lishi ravshan. Shuning uchun bu tenglamani chap tomonini $x+1$ ga bo'lib yechish usuli ma'lum bo'lgan kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz.

9-misol. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x = -1$ bu tenglamaning ildizi. Haqiqatdan ham $2(-1)^3 + 7(-1)^2 + 7(-1) + 2 = -2 + 7 - 7 + 2 = 0$. Tenglamaning chap tomonini $x+1$ ga bo'lib $2x^2 + 5x + 2$ bo'linmani xosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamani $(x+1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$ ko'rinishda yozamiz. Bu tenglama $x+1=0$ va $2x^2 + 5x + 2 = 0$ tenglamalarga teng kuchli. Bularni yechish usullari bizga ma'lum.

$\alpha x^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$ tenglamaga beshinchi darajali simmetrik tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ham ildizlaridan biri $x = -1$ bo'ladi. Tenglamani chap tomonini $x+1$ ga bo'lib, to'rtinchi darajali simmetrik tenglamani hosil qilamiz. Uni yechish usuli esa bizga ma'lum.

10-misol. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x=-1$ tenglamani ildizlaridan biri ekanligi ravshan. Tenglamani chap tomonini $x+1$ ga bo'lib, $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to'rtinchi darajali simmetrik tenglama bo'lib, uni yechish usuli bizga ma'lum.

Ba'zan $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$, $a \neq 0$ ko'rinishdagi tenglamalar ham uchrab turadi. Bunday tenglama to'rtinchi darajali kososimmetrik tenglama deyiladi. Bu tenglama $y=x - \frac{1}{x}$ almashtirish yordamida kvadrat tenglamaga keltiriladi.

11-misol. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglamani har ikkala tomonini x^2 ($x \neq 0$) ga hadma-had bo'lamiz. $6x^2+25x+12-\frac{25}{x}+\frac{6}{x^2}=0$, $6(x^2+\frac{1}{x^2})+25(x-\frac{1}{x})+12=0$. Agar $y=x-\frac{1}{x}$ deb olsak, u holda $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak, $6(y^2+2)+25y+12=0$ yoki $6y^2+25y+24=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib $y_1=-\frac{8}{3}$, $y_2=-\frac{3}{2}$ larni topamiz. Endi eski o'zgaruvchiga qaytib, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz.

1) $x-\frac{1}{x} = -\frac{8}{3}$; 2) $x-\frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$. Bu tenglamani yechish usullari bizga ma'lum.

Amalda $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$, $a \neq 0$ va $ax^3+bx^2-bx-a=0$, $a \neq 0$ ko'rinishdagi beshinchi va uchinchi darajali kososimmetrik tenglamalar ham uchrab turadi. $x=1$ soni bu tenglamaning har birini ildizi bo'ladi. Shuning uchun ularni har birini $x-1$ ga bo'lib, tenglama darajasini bittaga pasaytiriladi.

12-misol. $x^5-4x^4+5x^3-5x^2+4x-1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama beshinchi darajali kososimmetrik tenglamadir. Uning ildizlaridan biri $x=1$ bo'lishi ravshan. Xaqiqatdan ham

$1^5-4 \cdot 1^4+5 \cdot 1^3-5 \cdot 1^2+4 \cdot 1-1=1-4+5-5+4-1=0$. Berilgan tenglamani $x-1$ ga bo'lib, $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ to'rtinchi darajali simmetrik tenglama hosil qilamiz. Bu tenglamani yechish usuli bizga ma'lum.

Algebraik tenglamalar ichida ko'p uchraydigan tenglamalardan yana biri

$\alpha x^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 \alpha = 0$ ko'rinishdagi tenglamadir. Bu tenglamani kuzatadigan bo'lsak, uning birinchi hadi koeffitsientini ozod hadiga nisbati, ikkinchi hadi koeffitsientini ohirgi hadidan bitta oldingi hadining koeffitsientiga nisbatining kvadratiga tengligini ko'ramiz. Bunday tenglamalarni to'rtinchi darajali qaytma tenglamalar deyiladi. Bunday tenglamalarni yechishda $y = x + \frac{1}{x}$ almashtirish yordamida uning darajasini ikki marta pasaytiriladi.

13-misol: $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$ tenglama yechilsin.

Bu tenglama to'rtinchi darajali qaytma tenglamadir. Bu tenglamada ham $\frac{3}{12} = \left(\frac{-2}{-4}\right)^2$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Demak berilgan tenglama to'rtinchi darajali qaytma tenglama ekan. Uni yechish uchun x^2 ($x \neq 0$) ga bo'lamiz.

$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$, $3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$. $x + \frac{2}{x} = y$ almashtirish qilamiz. U holda $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$ bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$3(y^2 - 4) - 2y + 4 = 0$, $3y^2 - 2y - 8 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{4}{3}$. Endi eski o'zgaruvchiga qaytsak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi. $x + \frac{2}{x} = 2$; $x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3}$.

Bunday tenglamalarni yechish usullari bizga ma'lum.

$\alpha x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + \lambda cx^2 + \lambda^2 bx + \lambda^3 \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$ tenglama oltinchi darajali qaytma tenglamadir. Bunday tenglamalar ham yuqoridagi usul bilan yechiladi. Biz simmetrik, kososimmetrik va qaytma tenglamalarni kuzatib, dastlabki ikki tenglama qaytma tenglamaning $\lambda = 1$ va $\lambda = -1$ bo'lgan hollaridan ekanligini ko'ramiz.

Shunday qilib biz ushbu maqolada kvadrat tenglamaga keltiriladigan

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = A$, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = Ax^2$ ko'rinishdagi algebraik tenglamalar bilan birga simmetrik, kososimmetrik va qaytma tenglamalar hamda ularni yechish usullariga to'xtaldik. Amalda shunday tenglamalar uchraydiki,

ularni yuqoridagi tenglamalar sinfiga kiritib bo‘lmaydi. Bunday tenglamalarni odatda taqribiy usullar bilan yechiladi. Bunday tenglamalarni o‘rganish jarayonida o‘quvchilarning ijodiy fikrlash qobiliyatlari yanada rivojlanadi hamda ularning transsendent tenglamalarni puxta o‘zlashtirishlarida muhim omil bo‘lib hizmat qiladi va natijada maematik ta’lim samarali bo‘ladi. Bu o‘z vaqtida respublikamiz prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika fanlari va ta’limini rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiynomidagi matematik instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi farmonini bajarishga qaratilgan qadam deb qarash mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika fanlari va ta’limini rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiynomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Farmoni.
2. Alixonov.S Matematika o‘qitish metodikasi,T.”Tafakkur bo‘stoni”, 2011-385-b.
3. To‘laganov.T Masalalar yechish bo‘yicha praktikum. T.”O‘qituvchi”, 1981-104b.
4. Литвиненко В.Н. ,Мордкович А.Г. Практикум по решению задач. М.Просвещение, 1984.-288 с.
5. Степанова Т.С. Алгебра. Минск: Принтбук: Кузма, 2019.-288с.